

31.10.2024

Dans cette sézuce on va voir

- (i) la matrice de passage
 - (ii) propriétés des matrices des app. lin + mat. de passage
 - (iii) ~~la formule de changement de base~~ ← la prochaine fois!
- + exemples

Chapitre 8 Matrice de passage (ou changement de base)

① éf. (Thm. 8.2) | Soit V un E.V, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$ base de V
 $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_p\}$ base de V

Alors la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ via

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} := [\text{id}_V]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \stackrel{(\text{dét})}{=} \begin{bmatrix} [v_1]_{\mathcal{C}} & \dots & [v_p]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$

Exemple 8.4 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ bases de $\mathbb{R}^2$
 $\mathcal{C} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_2} \right\}$

On veut $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}}$
 plus facile! $P_{\mathcal{B}_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{C}}$

$$P_{B_{can} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [\bar{w}_1]_{B_{can}} & [\bar{w}_2]_{B_{can}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{w}_1 & \bar{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$\boxed{\forall \bar{v} \in \mathbb{R}^n : [\bar{v}]_{B_{can}} = \bar{v}}_c$

$$P_{\mathcal{B} \leftarrow B_{can}} = \begin{bmatrix} [\bar{e}_1]_{\mathcal{B}} & [\bar{e}_2]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}$$

$$[\bar{e}_1]_{\mathcal{B}} \stackrel{\text{d.f.}}{=} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \text{ t.q.}$$

$$\underbrace{\alpha_1}_{\bar{w}_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \underbrace{\alpha_2}_{\bar{w}_2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{e}_1} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow (\text{Resolution})$$

En conséquence

$$[\bar{e}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

et pareil pour $[\bar{e}_2]_{\mathcal{B}}$.

$$\begin{cases} 3\alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 1/3 \\ \alpha_1 = 1/3 \end{cases}$$

Propriétés des matrices de passage

Même terminologie que dans la définition:

$$\begin{matrix} \text{(PROP)} \\ \text{(FOND)} \end{matrix} \quad [v]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow B} [v]_B$$

$\alpha_1 = 1/3$
 $\forall v \in V$
 et $P_{\mathcal{B} \leftarrow B}$ est l'unique matrice qui satisfait à sa.

$$\bullet P_{\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{B}} \cdot P_{\mathcal{B} \leftarrow B} = P_{\mathcal{Q} \leftarrow B}, \forall \mathcal{Q} \text{ base de } V$$

$$\bullet P_{\mathcal{B} \leftarrow B} \text{ est inversible et } P_{\mathcal{B} \leftarrow B}^{-1} = P_{B \leftarrow \mathcal{B}}$$

Exemple 8.4 (suite)

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}_{can}} = P_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{C}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$T: V \rightarrow V'$ app. lin. $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ bases de V , $\mathcal{B}', \mathcal{C}'$ bases de V'
 $\dim(V) = n$ $\dim(V') = m$

(Rappel)

PROP
FOND

$$[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}'}$$

Propriétés

① Soit $S: V' \rightarrow V''$, $\mathcal{B}''$ base de V'' . Alors

$$[S \circ T]_{\mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}'} [T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$$

② T bijective ssi $[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$ est inversible

③ Dans ce cas

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}^{-1}$$

et $[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$ est la
seule matrice qui
satisfait à ça

$$\textcircled{3} \quad v \in \text{Ker}(T) \iff [v]_{\mathcal{B}} \in \text{Ker}([T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}})$$

En conséquence: $T \text{ inj} \iff [T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} \text{ inj}$

$$\textcircled{4} \quad v' \in \text{Img}(T) \iff [v']_{\mathcal{B}'} \in \text{Img}([T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}})$$

En conséquence

$$T \text{ surj} \iff [T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} \text{ surj}$$

Exemple 4.57 (suite)

$$T: \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}_{\text{can}} = \{1, t, t^2\}$$

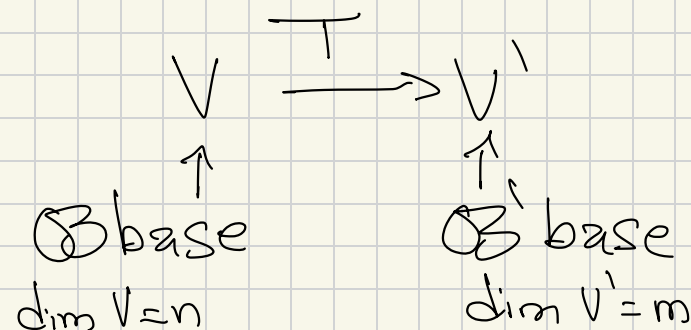
$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(1) \end{pmatrix} \quad \mathcal{B}' = \mathcal{B}'_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

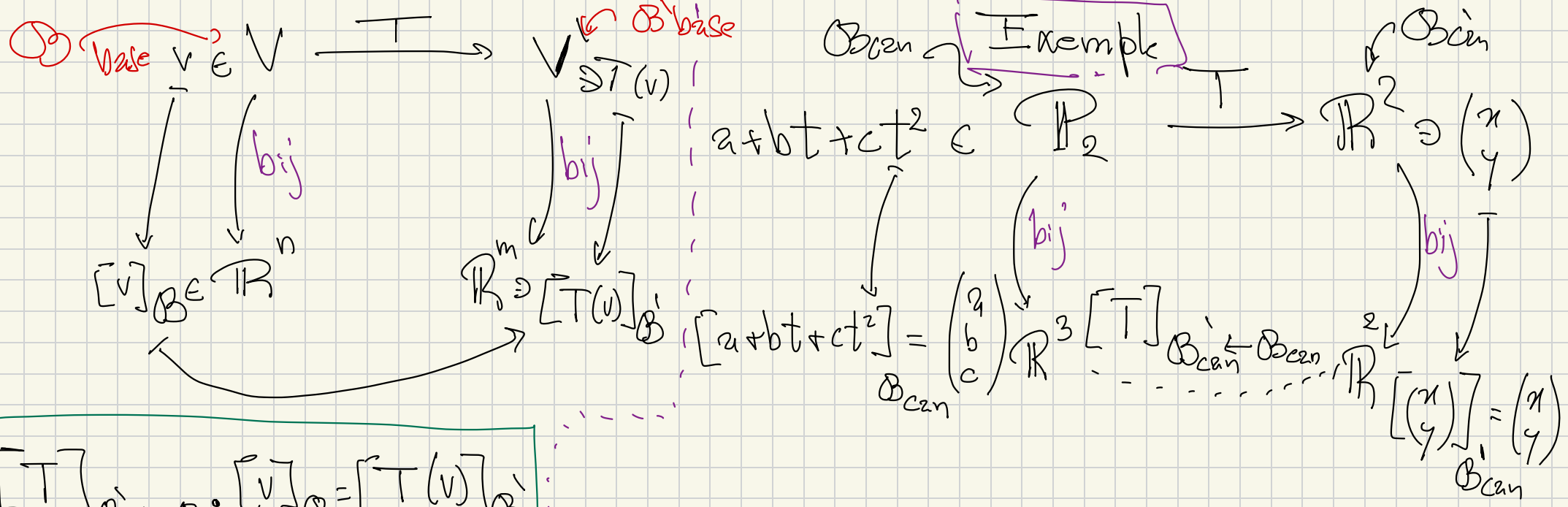
$$[T]_{\mathcal{B}'_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

← sous forme échelonnée réduite

D'après $\textcircled{4}$, $[T]_{\mathcal{B}'_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}} \text{ surj} \implies \underline{T \text{ surjective}}$

Rappel sur $[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$:





$$[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}'}$$

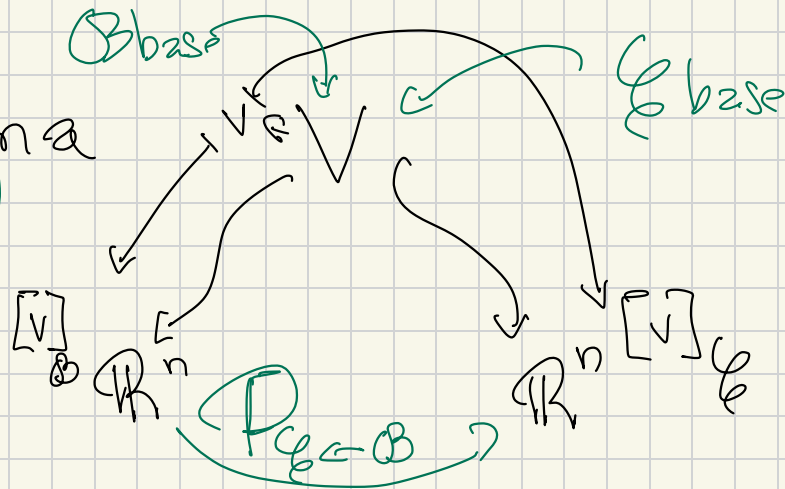
$\underbrace{[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}}_{\in \text{IM}(\mathbb{R})_{m \times n}} \cdot \underbrace{[v]_{\mathcal{B}}}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{[T(v)]_{\mathcal{B}'}}_{\in \mathbb{R}^m}$

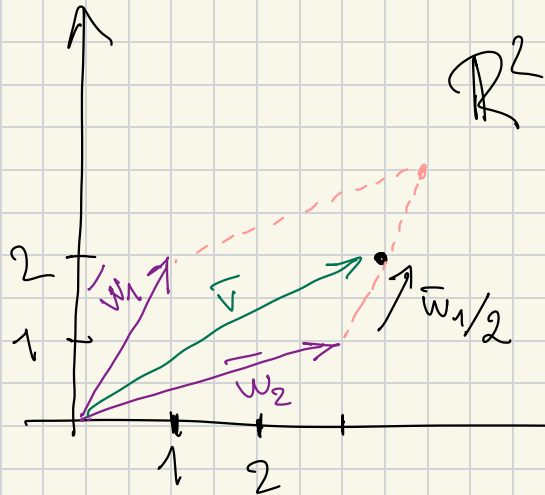
$$[T(a+bt+ct^2)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} = [T]_{\mathcal{B}'_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}} \cdot [a+bt+ct^2]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$$

Pour matrices de passage on a

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{C}}$$

$\underbrace{P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}}_{\in \text{IM}_{n \times n}(\mathbb{R})} \cdot \underbrace{[v]_{\mathcal{B}}}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{[v]_{\mathcal{C}}}_{\in \mathbb{R}^n}$





$$\bar{v} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{v} = \bar{w}_2 + \frac{1}{2} \cdot \bar{w}_1$$

$$\bar{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{C}$ base de $\mathbb{R}^2$

$$[\bar{v}]_{B_{can}} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 2 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$[\bar{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 4.57 (suite)

$$T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$p = at + bt + ct^2 \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b+2c \end{pmatrix}$$

$$[T]_{B'_{can} \leftarrow B_{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ker(T)?

①

$$\text{On cherche } \text{Ker}([T]_{B'_{can} \leftarrow B_{can}}) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Or

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

x_3 variable!

$$\text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

base
de $\text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

② On traduit vecteurs de $\text{Ker}([T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}})$ dans des vecteurs de V :

pour chaque él. de base de $\text{Ker}([T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}})$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{Ker}([T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}) \rightsquigarrow x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ él. de base de $\text{Ker}(T)$
 $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow 0 \cdot 1 + (-2) \cdot t + 1 \cdot t^2 = t^2 - 2t$$

i.e.
 $\{t^2 - 2t\}$ base de $\text{Ker}(T)$

$$\mathcal{B}_{\text{can}} = \{1, t, t^2\}$$